Διάλεξη 2η

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

Ορισμός. Μετασχηματισμός Laplace. Παρατηρήσεις. Παραδείγματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1 Αν είναι f, g συναρτήσεις που μετασχηματίζονται κατά Laplace για $s > s_0$, τότε

(i) Η συνάρτηση $c_1 f + c_2 g$ μετασχηματίζεται κατά Laplace για $s > s_0$ (c_1, c_2 σταθερές) και είναι

$$\mathcal{L}[c_1 f + c_2 g](s) = c_1 \mathcal{L}[f](s) + c_2 \mathcal{L}[g](s), \quad s > s_0.$$

(ii) Η συνάρτηση $e^{ct} \cdot f$ μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}[e^{ct} f(t)](s) = L[f](s - c), \quad s > s_0 + k.$$

(iii) Η συνάρτηση $f(cx), c > 0$ μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f](\frac{s}{c}), \quad s > cs_0.$$

(iv) Αν f είναι μια κατά τμήματα συνεχής $T-$ περιοδική συνάρτηση, τότε η f μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Ορισμός. Συναρτήσεις εκθετικής τάξης. Παρατηρήσεις. Παραδείγματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2 Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις εκθετικής τάξης r_1 και r_2 αντίστοιχα, τότε:

(i) Η συνάρτηση $f + g$ είναι εκθετικής τάξης $max\{r_1, r_2\}$.

(ii) Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι εκθετικής τάξης $r_1 + r_2$.

(iii) Η συνάρτηση $\int f(t) dt$ είναι εκθετικής τάξης $r > max\{0, r_1\}$.

(iv) Η συνάρτηση $t^m f(t)$ $(m > 0)$ είναι εκθετικής τάξης r για κάθε $r > r_1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3 Αν $f : [0, \infty) \to R$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και εκθετικής τάξης r, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f ορίζεται για κάθε $s > r$.

Πόρισμα. Αν $f : [0, \infty) \to R$ είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης r, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f ορίζεται για κάθε $s > r$.

Παραδείγματα. Ασκήσεις

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ Laplace ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$

- $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad 0 < s, \quad (n \in N)$ $\qquad \mathcal{L}[t^a](s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad 0 < s \quad (-1 < a)$

- $\mathcal{L}[e^{kt}](s) = \frac{1}{s-k}, \quad k < s$

- $\mathcal{L}[sin(at)](s) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

- $\mathcal{L}[cos(at)](s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

- $\mathcal{L}[t^n e^{kt}](s) = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}, \quad s > k$

- $\mathcal{L}[tsin(at)](s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0$

- $\mathcal{L}[tcos(at)](s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0$

- $\mathcal{L}[sinh(at)](s) = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$

- $\mathcal{L}[cosh(at)](s) = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$

- $\mathcal{L}[sin(bt) - btcos(bt))](s) = \frac{2b^3}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0$

- $\mathcal{L}[[t]](s) = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}, \quad s > 0$

- $\mathcal{L}[r^{[t]}](s) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-s})}, \quad s > 0$

- $\mathcal{L}[[t]r^{[t]}](s) = \frac{1-e^{-s}}{s} \frac{re^{-s}}{s(1-e^{-s})}, \quad s > 0$